

УДК 517.947

А. П. Громик, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,  
м. Кам'янець-Подільський**МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ**

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів (гіперболічної крайової задачі) у кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

**Ключові слова:** моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, функція впливу, функція Гріна.

**Вступ.** Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливальних гіперболічного типу (хвильове рівняння)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(t, P),$$

де  $\Delta_3$  — тривимірний оператор Лапласа у відповідній системі координат тривимірного евклідового простору,  $P$  — точка в цьому просторі.

Зрозуміло, що для адекватного моделювання коливного процесу до складу математичної моделі крім хвильового рівняння потрібно додати ще певні початкові та крайові умови. Таким чином, математичною моделлю процесу є гіперболічна крайова задача математичної фізики [1]. На цей час досить детально вивчено гіперболічні крайові задачі математичної фізики однорідних середовищ. Але у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів у будівництві, техніці, технологіях як математичні моделі виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими [2; 3].

Окрім методу відокремлення змінних [4], одним з важливих і ефективних методів дослідження лінійних крайових задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових

задач через їх інтегральне зображення. У той же час, для досить широкого класу задач в кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [5–7].

У цій статті, яка є логічним продовженням [8], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливного процесу в кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі, побудований методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна).

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z); t > 0; r \in (0, R); R < +\infty; \varphi \in [0; \varphi_0); \varphi_0 < 2\pi; z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \right. \\ \left. = \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} = l < +\infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + a_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad (1) \\ z \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial r^k} \Big|_{r=0} = 0; \left( \frac{\partial}{\partial r} + h \right) u_j \Big|_{r=R} = \theta_j(t, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; k = \overline{0, 1}; \quad (3)$$

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, r, \varphi); \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi), \quad (4)$$

умовами спряження [7]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n} \quad (5)$$

та одними з крайових умов на гранях клина [5]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (6)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (9)$$

де  $a_{rj}$ ,  $a_{zj}$ ,  $a_j$ ,  $\alpha_{js}^k$ ,  $\beta_{js}^k$ ,  $h$  — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} c_{2k} > 0; \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0; \quad |\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\},$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z); g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z); g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$\theta(t, \varphi, z) = \{\theta_1(t, \varphi, z), \theta_2(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}(t, \varphi, z)\};$$

$g_0(t, r, \varphi)$ ,  $g_l(t, r, \varphi)$ ,  $g_{sj}(t, r, z)$ ,  $\omega_{sj}(t, r, z)$ ;  $s = \overline{1, 4}$ ;  $j = \overline{1, n+1}$  — задані обмежені неперервні функції;

$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z); u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$  — шукана функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку  $a_j^2 = 0$  рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
- 2) у випадку  $\alpha_{11}^k = 0$ ,  $\beta_{11}^k = 1$ ;  $\alpha_{12}^k = 0$ ,  $\beta_{12}^k = 1$ ;  $\alpha_{21}^k = E_1^k$ ,  $\beta_{21}^k = 0$ ;  $\alpha_{22}^k \equiv E_2^k$ ,  $\beta_{22}^k = 0$ , де  $E_1^k$ ,  $E_2^k$  — модулі Юнга,  $k = \overline{1, n}$ , умови спряження (5) є умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках, розглянута задача є математичною моделлю коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

**Основна частина.** Припустимо, що розв'язки гіперболічних крайових задач (1)–(5), (6); (1)–(5), (7); (1)–(5), (8); (1)–(5), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [5; 7]. Іншими словами, розв'язки розглянутих задач шукаємо у класах двічі неперервно диференційованих за змінними  $(t, r, \varphi, z)$  функцій, для яких існують відповідні прямі та обернені інтегральні перетворення за геометричними змінними  $(r, \varphi, z)$ .

Побудовані за відомою логічною схемою [6] методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi$  [5], інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної  $r$  [5], та гібридного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $(l_0; l)$  з  $n$  точками спряження щодо змінної  $z$  [7], єдині розв'язки гіперболічних початково-крайових задач (1)–(5), (6); (1)–(5), (7); (1)–(5), (8); (1)–(5), (9) визначають функції

$$\begin{aligned}
 u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_0^{l_p} E_{jp,ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{l_p} E_{jp,ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p d\xi d\alpha d\rho + \\
 & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{l_p} E_{jp,ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p d\xi d\alpha d\rho + \\
 & + a_{rj}^2 \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{l_p} Q_{jp,ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_0^R \int_0^{l_p} \left[ W_{j,ik}^1(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) g_0(\tau, \rho, \alpha) + \right. \\
 & \left. + W_{j,ik}^2(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) g_l(\tau, \rho, \alpha) \right] \rho d\alpha d\rho d\tau + \\
 & + a_{rj}^2 \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_0^{l_p} W_{jp,ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) \theta_k(\tau, \alpha, \xi) \sigma_p d\xi d\alpha d\tau; j = \overline{1, n+1}; i, k = \overline{1, 2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

У формулах (10) беруть участь головні розв'язки:

компоненти

$$E_{jp,ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} E_{jp,m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$Q_{jp,ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} E_{jp,m,ik}(t-\tau, r, \rho, z, \xi) U_{m,ik}(\varphi) \Phi_{m,ik}(u_j)$$

тангенціальної матриці Гріна (тангенціальні функції), компоненти

$$W_{j,ik}^1(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 \left( \alpha_{11}^0 \right)^{-1} E_{j1,ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, l_0)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна, компоненти

$$W_{j,ik}^2(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 \left( \alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} E_{j,n+1,ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, l)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна та компоненти

$$W_{jp,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi) = RE_{jp,ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z, \xi),$$

радіальної матриці Гріна (функції Гріна) відповідних гіперболічних крайових задач, де

$$E_{jp,m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) = \frac{4}{\pi \varphi_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\beta_s, \beta)t)}{\Delta(\beta_s, \beta)} V_j(z, \beta) V_k(\xi, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \times \\ \times \frac{J_\nu(\beta_s r) J_\nu(\beta_s \rho)}{\|J_\nu(\beta_s r)\|^2}; \nu = \beta_{m,ik}; j, p = \overline{1, n+1}; i, k = \overline{1, 2}; \\ \Delta^2(\beta_s, \beta) = \beta^2 + a_{r1}^2 \beta_s^2 + a_1^2.$$

З використанням властивостей функцій впливу  $E_{jp,ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ , тангенціальних функцій  $Q_{jp,ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$  і функцій Гріна  $W_{j,ik}^s(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$ ,  $s = \overline{1, 2}$ ,  $W_{jp,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi)$  безпосередньо перевіряється, що функції  $u_{j,ik}(t, r, \varphi, z)$ , визначені формулами (10), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), умови спряження (5) та одну з крайових умов (6)–(9) при відповідних значеннях  $ik$  (11, 12, 21, 22) в сенсі теорії узагальнених функцій [9].

Єдиність розв'язків (10) впливає із їх структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу, тангенціальних функцій та функцій Гріна).

Методами з [10] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані задачі, формули (10) визначають обмежені класичні розв'язки розглянутих гіперболічних крайових задач.

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{rj} = a_{zj} \equiv h_j > 0$  формули (10) визначають структури розв'язків гіперболічних крайових задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

**Зауваження 2.** Параметр  $h$  дає можливість виділяти із формул (10) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні  $r = R$  крайових умов 1-го роду ( $h \rightarrow \infty$ ) та 2-го роду ( $h \rightarrow 0$ ).

**Зауваження 3.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  дають можливість виділяти із формул (10) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $z = l_0, z = l$  крайових умов 1-го, 2-го роду, 3-го роду та їх можливих комбінацій.

**Висновки.** Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів у кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних еволюційних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливальних механічних систем).

### Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
4. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
5. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
6. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
7. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
8. Громик А. П. Моделювання коливних процесів у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі / А. П. Громик, І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 8. — С. 44–50.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
10. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 247 с.

The method of integral transforms in combination with the method of main solutions built an exact analytical solution of a mathematical model of oscillatory processes (hyperbolic boundary value problem) in wedge-shaped piecewise homogeneous solid cylinder.

**Key words:** *modelling, oscillating, hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transformation, the influence function, Green's function.*

Отримано: 12.03.2014